数理解析研究所講究録
第 808 巻 1992 年 189-193

Fusion rule of A type WZW model and level-rank duality

中西知樹 (名大理)
(河野俊丈 (東大数理) 記)

このノートは、中西氏の講演に基づき記録者がその要旨をまとめたものである。第 1 節では、A 型の fusion algebra の定義と基本的な性質を述べる。第 2 節で、fusion rule を記述する Kac-Walton formula, Verlinde formula を紹介し、さらに第 3 節で数理物理との関係、level-rank duality について触れる。

1. Fusion algebra for $\widehat{sl(n)}_l$

この節では、Goodman-Wenzl[GW] に従い A 型 Lie 環に対応した fusion algebra の定義と主な性質を述べる。整数 $n \geq 2, l \geq 0$ を固定する。Lie 環 $sl(n,C)$ の表現環を R_n とおく。$sl(n)$ の基本ウェイトを$\overline{\Lambda}_1, \cdots, \overline{\Lambda}_{n-1}$ とおくと、dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \overline{\Lambda}_i \quad ; \quad a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0 \right\}$$

と表される。 また、affine Lie algebra $\widehat{sl(n)}$ の基本ウェイトを$\Lambda_0, \cdots, \Lambda_{n-1}$ とおくと、$\widehat{sl(n)}$ の level l dominant integral weight の集合は、

$$P_+(n,l) = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i \quad ; \quad a_i \in \mathbf{Z}, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n-1} a_i = l \right\}$$

と表される。 自然な inclusion map $j : P_+(n,l) \longrightarrow P_+(n)$ を$\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \Lambda_i$について $j(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \overline{\Lambda}_i$で定義し、$j(\lambda)$ を$\overline{\lambda}$と書いて、これをλ の classical part とよぶ。dominant integral weight の集合の間の自然な inclusion map $P_+(n,l) \subset P_+(n,l+1)$ を考え、

$$\partial P_+(n,l) = P_+(n,l+1) \setminus P_+(n,l)$$

とおく。 表現環 R_n は、$\lambda \in P_+(n)$ を $\mathbf{Z}$ basis として持つが、$\partial P_+(n,l)$ で生成される R_n のイデアルを $I_{n,l}$ と書く。 このとき、fusion algebra $R_{n,l}$ を

$$R_{n,l} = R_n / I_{n,l}$$

と定義する。

表現環 R_n において $\lambda, \mu \in P_+(n)$ の積を

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n)} \overline{N}_{\lambda\mu}^{\nu} \nu$$

と表すと、この構造定数は Littlewood-Richardson 係数であり、$sl(n)$ の表現のテンソル積の分岐則にほかならない。$R_{n,l}$ について、次が知られている。

Proposition [GW]. fusion algebra $R_{n,l}$ は、$\lambda \in P_+(n,l)$ を $\mathbf{Z}$ basis として持つ free $\mathbf{Z}$ module である。

積構造を $\lambda, \mu \in P_+(n,l)$ に対して、

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in P_+(n,l)} N_{\lambda\mu}^{\nu} \nu$$

で表す。この構造定数 $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ を fusion rule とよぶ。 これは、non-negative integer となり次の性質が知られている。

$$N_{\lambda\mu}^{\nu} \leq \overline{N}_{\lambda\mu}^{\overline{\nu}}$$
$$N_{\sigma^i(\lambda)\sigma^j(\mu)}^{\sigma^{i+j}(\nu)} = N_{\lambda\mu}^{\nu}$$

ここで、σ は affine Lie algebra $\widehat{sl(n)}$ の Dynkin diagram automorphism の生成元を示す。

2. Explicit expression of the fusion rule

この節では、fusion rule の記述に関して、Littlewood-Richardson rule を用いる Kac-Walton formula 及び、affine Lie algebra の表現の指標を用いる Verlinde formula について述べる。

Lie algebra $sl(n)$ の root lattice を Q 、weight lattice を P で表す。$\overline{W}$ を $sl(n)$ の Weyl 群とすると、これは weight lattice Pに作用する。W_lを $\widehat{sl(n)}$の level l Weyl group とする。W_lの Pへの作用の基本領域が、$P_+(n,l)$ に対応している。$sl(n)$ の positive root の和の 1/2 をρとおく。W_lの元 w の shifted action を

$$w \bullet \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$$

で定義する。この shifted action と Littlewood-Richardson rule を用いて、fusion rule は次の有限和で与えられる。

Proposition (Kac-Walton formula).

$$N_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{w \in W_l} \det w \, \overline{N}_{\overline{\lambda}\overline{\mu}}^{w \bullet \overline{\nu}}$$

$P_+(n,l)$ の元λについて level l integrable highest weight module $L(\lambda)$ を考え、その指標をch_λとおく。Kac-Peterson により $ch_\lambda(\tau), \lambda \in P_+(n,l)$, $Im\,\tau > 0$ は、modular 群の作用で閉じていることが知られていて、とくに S変換による作用を

$$ch_\lambda(-1/\tau) = \sum_{\mu \in P_+(n,l)} S_{\lambda\mu} ch_\mu(\tau)$$

で表す。具体的には、

$$S_{\lambda\mu} = \frac{i^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+l)^{n-1}}} \sum_{w \in \overline{W}} \det w \, \exp\left(-\frac{2\pi i}{l+n}\langle w(\overline{\lambda}+\rho), \overline{\mu}+\rho\rangle\right)$$

で与えられる。このとき、fusion rule を S行列を用いて表すのが次の Verlinde formula である。

Proposition (Verlinde formula).

$$N_{\lambda\mu}^{\nu} = \sum_{\alpha \in P_+(n,l)} \frac{S_{\lambda\alpha} S_{\mu\alpha} S_{\nu\alpha}^*}{S_{\phi\alpha}}$$

3. Relevent physical systems, level-rank duality

Gepner-Witten [GeW], Tsuchiya-Ueno-Yamada [TUY] などで考察されているように fusion rule は、conformal block の空間の次元と関連して重要な意味をもつ。つまり、chiral vertex operator

$$\Phi(z) : L(\lambda) \otimes L(\mu) \otimes L(\nu)\dagger \longrightarrow C$$

の空間の次元として、fusion rule $N^{\nu}_{\lambda\mu}$ が現れる。また、[JKMO] などで研究されている fusion RSOS model においても類似の構造が見いだされている。詳細は、[GN] などを参照されたい。

$\widehat{sl(n)}_l$ の fusion rule と $\widehat{sl(l)}_n$ の fusion rule を関連づけるのが level-rank duality で、[KN],[GW] などで調べられている。$P_+(n,l)$ の元に対応した Young 図形 Y について、その転置 ${}^tY$ をとることにより $P_+(l,n)$ の元が得られる。Dynkin diagram automorphism の作用を考えて、これらをそれぞれ $\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_l$ の作用による軌道でおきかえることにより、bijection が得られる。この時、fusion rule について次の等式が成り立つ。

Proposition (level-rank duality).
$\lambda \in P_+(n,l)$ に対応する Young 図形の node の数を $|\lambda|$ と書くことにすると、$|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ の条件の下に

$$N^{\nu}_{\lambda\mu} = N^{{}^t\nu}_{{}^t\lambda{}^t\mu}$$

ここで左辺、右辺はそれぞれ $\widehat{sl(n)}_l$, $\widehat{sl(l)}_n$ の fusion rule を意味する。

[NT] において、level-rank duality の conformal block の duality による意味づけが与えられている。また、B, C, D 型の level-rank duality については [MNRS] で調べられている。

References

[GeW] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. B278 (1986) 493.

[GN] F. M. Goodman and T. Nakanishi, Phys. Lett. B262 (1991) 259.

[GW] F. M. Goodman and H. Wenzl, Advances in Math. 82 (1990) 244.

[JKMO] M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, Comm. Math. Phys. 119 (1988) 543.

[KN] A. Kuniba and T. Nakanishi, in Modern Quantum Field Theory, eds. A. Das et al., World Scientific 1991, 344–374.

[MNRS] E. Mlawer, S. Naculich, H. Riggs and H. Schnitzer, Nucl. Phys. B352 (1991) 863.

[NT] T. Nakanishi and A. Tsuchiya, Comm. Math. Phys. 114 (1992) 351.

[TUY] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989) 459.